ECUACIONES DIFERENCIALES **30 Mayo 2013**	1^{er} APELLIDO:	TIEMPO: **1 hora**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática, UPM	2^{o} APELLIDO: NOMBRE: N^{o} MATRÍCULA:	PUNTOS: NOTA FINAL:

1. (2 puntos) Hallar la función $y(t)$ que verifica la siguiente ecuación:

$$y(t) - 2\int_0^t \cos(t-u)y(u)du = \operatorname{sen} t, \quad t \geq 0$$

Solución. Aplicando transformada de Laplace se obtiene $Y(s) - \frac{2s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$. De aquí, $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Aplicando transformada inversa se obtiene $y(t) = te^t$. $\square$

2. (3 puntos) (i) Dar y demostrar la fórmula para obtener la transformada de Laplace de una función $f(t)$ continua a trozos, de orden exponencial y periódica con periodo τ.

(ii) Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Solución. La trasformada de Laplace de $f(t)$ es

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_1^2 (2-t)e^{st}dt = \left(\frac{e^{-s}(s-1)+e^{-2s}}{(1-e^{-2s})s^2}\right).$$

$\square$

3. (3 puntos) Resolver mediante transformada de Laplace la ecuacion diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución. Aplicando transformada de Laplace se obtiene $s^2Y(s)+2sY(s)+5Y(s) = \mathcal{L}[U(t) - U(t-3)](s)$. Así,

$$(s^2+2s+5)Y(s) = \frac{1-e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1-e^{-\pi s}}{s((s+1)^2+4)}$$

Con la descomposición en fracciones simples vemos que

$$\frac{1}{s((s+1)^2+4)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right)$$

y aplicando transformada inversa se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{5}(U(t) - U(t-\pi)) + \frac{1}{5}(-e^{-t} + e^{-t+\pi}U(t-\pi))(\cos(2t) + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}).$$

Esto es,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos(2t) + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right) & 0 < t < \pi \\ \frac{1}{5}(e^{-t+\pi} - e^{-t})\left(\cos(2t) + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right) & t > \pi \end{cases}$$

$\square$